99 MATH. II - MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit $\mathfrak{E}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes définies et continues sur le segment $I = [0, \pi]$. Soit $\|.\|_\infty$ l'application qui, à toute fonction f de $\mathfrak{E}$, associe le maximum du module de la fonction f sur l'intervalle I :

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x)| .$$

Il est connu que l'espace $(\mathfrak{E}, \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Soit $\mathfrak{F}$ le sous-ensemble des fonctions f, continûment dérivables, qui appartiennent à l'espace vectoriel $\mathfrak{E}$, qui prennent la valeur 0 aux points 0 et π et dont l'intégrale du carré du module de la fonction dérivée f' est majorée par 1.

$$\mathfrak{F} = \{ f \mid f \in \mathfrak{E} , f \in C^1(I), \int_0^\pi |f'(x)|^2 \, dx \leqslant 1, f(0) = f(\pi) = 0 \} .$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des fonctions complexes f définies sur le segment $I = [0, \pi]$ possédant la propriété : il existe une suite complexe $(b_n)_{n \geqslant 1}$, telle que

- la série de terme général $c_n = n^2 |b_n|^2$, $n \geqslant 1$, est convergente et sa somme est majorée par $2/\pi$,
- pour tout x réel de l'intervalle I, la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geqslant 1$, est convergente et sa somme est égale à f(x).

$$\mathfrak{G} = \Big\{ f \mid f \text{ est définie sur I, il existe une suite de nombres complexes } b_n, n \geqslant 1 \text{ telle que : } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \text{ , pour tout réel x de I, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \Big\} .$$

Le but du problème est d'étudier d'une part les relations existant entre les ensembles $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$, d'autre part leurs propriétés.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

Résultats préliminaires.

I-1°) Convergence de la série trigonométrique $b_n \sin(nx)$, $n \geqslant 1$:

Soit une suite complexe $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que la série de terme général $n^2 |b_n|^2$, $n \geqslant 1$, soit convergente. Démontrer que la série de terme général b_n, $n \geqslant 1$, est absolument convergente en utilisant par exemple l'inégalité :

pour deux réels positifs a et b, $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$.

En déduire que l'ensemble $\mathfrak{G}$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{E}$.

I-2°) Un exemple de fonction appartenant à l'ensemble $\mathfrak{G}$:

a. En admettant le résultat classique : la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, est égale à $\frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme S de la série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$, $k \geqslant 0$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

b. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par la relation : $h(x) = \min(x, \pi - x)$.
Soit $\tilde{h}$ la fonction définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction h :

pour tout réel x, $\tilde{h}(-x) = -\tilde{h}(x)$, $\tilde{h}(x+2\pi) = \tilde{h}(x)$,

pour tout réel x de l'intervalle I, $\tilde{h}(x) = h(x)$.

i/ Montrer que la fonction $\tilde{h}$ est continue ; déterminer sa série de Fourier ;

ii/ Quelle est la somme de la série de Fourier de la fonction $\tilde{h}$? Retrouver la valeur de S calculée ci-dessus.

iii/ En déduire que la fonction $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} h(x)$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{G}$.

I-3°) Égalité entre une fonction périodique et la somme de sa série de Fourier :

Étant données deux fonctions complexes f et g, définies et continues sur la droite réelle, 2π-périodiques, il est admis que, si les coefficients de Fourier des fonctions f et g sont égaux, les deux fonctions f et g sont égales : l'égalité, pour tout entier relatif n, de $c_n(f)$ et de $c_n(g)$ implique l'égalité de f et de g.

Démontrer que, si f est une fonction complexe, définie et continue sur la droite réelle, 2π-périodique, dont la série de Fourier converge uniformément, la fonction f est alors égale à la somme de sa série de Fourier.

Deuxième partie

L'ensemble $\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{G}$.

II-1°) Une fonction f de $\mathcal{F}$ est la somme d'une série trigonométrique :

Soit f une fonction donnée de l'ensemble $\mathcal{F}$.

a. Soit $\tilde{f}$ la fonction, définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction f. Établir que cette fonction $\tilde{f}$ est continûment dérivable sur la droite réelle.

b. En déduire l'existence d'une suite complexe $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout réel x de l'intervalle I, le réel f(x) soit égal à la somme de la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geqslant 1$. Préciser la convergence de cette série.

II.2°) Inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$:

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$; démontrer que cette fonction f appartient aussi à l'ensemble $\mathcal{G}$. Est-ce que l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est stricte ?

Troisième partie

Densité du sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ pour la distance déduite de la norme de $\mathcal{E}$.

Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ est compact.

III-1°) Densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$:

Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{G}$; la fonction g est la somme d'une série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n\geqslant 1$; soit g_p la somme des p premiers termes de cette série (p est un entier strictement positif) : $g_p(x) = \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(nx)$.

Démontrer que pour tout entier p, $p \geqslant 1$, la fonction g_p appartient au sous-ensemble $\mathcal{F}$. Établir que la fonction g est la limite dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ de la suite des fonctions g_p, $p \geqslant 1$. En déduire que le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{G}$.

III-2°) Limite d'une suite convergente de fonctions appartenant à $\mathcal{G}$:

Soit $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathcal{G}$ qui converge dans $\mathcal{E}$ vers une fonction f. Par définition de $\mathcal{G}$, pour chaque fonction f_r, il existe une suite de nombres complexes $b_{r,n}$, $n \geqslant 1$, tels que

- la série de terme général $n^2 |b_{r,n}|^2$, $n \geqslant 1$, est convergente ; sa somme est majorée par $\frac{2}{\pi}$;

Tournez la page S.V.P.

• pour tout entier n, $n \geqslant 1$, et tout réel x de I, $f_r(x)$ est la somme de la série de terme général $b_{r,\,n}\sin(nx)$, $n \geqslant 1$: $f_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{r,\,n}\sin(nx)$.

a. Démontrer que, pour tout entier n fixé, $n \geqslant 1$, la suite $(b_{r,\,n})_{r\in\mathbb{N}}$ est convergente et a une limite b_n, qui est le nombre complexe défini par la relation ci-dessous :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx .$$

b. Établir que les nombres complexes b_n, $n\geqslant 1$, définis ci-dessus ont la propriété : la série de terme général $n^2\,|b_n|^2$, $n\geqslant 1$, est convergente ; sa somme vérifie l'inégalité suivante : $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,|b_n|^2 \leqslant \frac{2}{\pi}$.

c. En déduire que la fonction f appartient à l'ensemble $\mathfrak{G}$.

III-3°) Adhérences des sous-ensembles $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{E}$:

Déterminer l'adhérence du sous-ensemble $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{E}$; en déduire que $\mathfrak{G}$ est fermé. Quelle est l'adhérence dans $\mathfrak{E}$ du sous-ensemble $\mathfrak{F}$?

III-4°) Le sous-ensemble $\mathfrak{G}$ est compact :

a. Soit f une fonction appartenant au sous-ensemble $\mathfrak{F}$. Démontrer, pour tout couple de réels x et y de l'intervalle I, vérifiant l'inégalité $x\leqslant y$, la relation :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{y - x} .$$

Utiliser, par exemple, l'expression de la différence f(y)–f(x) au moyen d'une intégrale.

b. Soit $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathfrak{F}$; il est admis qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement en tout point de l'intervalle I d'abscisse rationnelle : pour tout rationnel z $(0\leqslant z<\pi)$ $(f_{\varphi(r)}(z))_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Démontrer que la suite des fonctions $g_r = f_{\varphi(r)}$, $r\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur l'intervalle I.

c. En déduire que le sous-ensemble $\mathfrak{G}$ est compact.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE